УДК 517.988.6

ВОЛЬТЕРРОВЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ [1]

© Е. С. Жуковский, M. J. Alves

Ключевые слова: уравнение Вольтерра; вольтерровы операторы; метрическое фактор-пространство.

Аннотация: Изучаются действующие в метрических пространствах операторы, сохраняющие заданные отношения эквивалентности. Исследуется разрешимость уравнений с такими операторами.

В работе [1] для отображений банаховых пространств введено понятие вольтерровости на системе отношений эквивалентности, исследована разрешимость уравнений с такими операторами. При соответствующем выборе системы отношений это понятие равносильно различным известным трактовкам свойства эволюции, причинности операторов, в том числе классическому определению вольтерровости по А.Н. Тихонову. Здесь рассматриваются вольтерровые операторы, действующие в метрических пространствах.

Будем предполагать, что в метрическом пространстве X определено отношение эквивалентности $\sim$. Для любых двух классов эквивалентности $\bar{x}$, $\bar{u}$ положим

$$d_X(\bar{x},\bar{u}) = \inf_{x\in\bar{x},\, u\in\bar{u}} \rho_X(x,u). \tag{1}$$

Если формула (1) задает метрику в фактор-множестве $X/{\sim}$, то будем называть $\big(X/{\sim}, d_X\big)$ *метрическим фактор-пространством.*

У т в е р ж д е н и е 1. *Если формула (1) задает метрику в фактор-множестве $X/{\sim}$, то отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X обладает следующим свойством: для любых элементов x, u, x_i, $u_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$, из соотношения $x_i \sim u_i$, выполненного при всех i, и сходимости $\rho_X(x_i, x) \to 0$, $\rho_X(u_i, u) \to 0$, следует $x \sim u$.*

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть метрическое пространство X является полным, и пусть для каждого элемента $x \in X$ его класс эквивалентности $\bar{x}$ есть замкнутое множество. Предположим, также, что выполнены условия:*

($\mathtt{d}^2$) *для произвольного $\varepsilon > 0$, для любых трех классов $\bar{x}, \bar{u}, \bar{w} \in X/{\sim}$ существуют такие элементы $x \in \bar{x}$, $u \in \bar{u}$, $w \in \bar{w}$, что имеет место неравенство $\rho_X(x,u) + \rho_X(u,w) \leqslant d_X(\bar{x},\bar{u}) + d_X(\bar{u},\bar{w}) + \varepsilon$;*

($\mathtt{d}^\infty$) *для любых классов $\bar{x}_i \in X/{\sim}$, $i = 1, 2, \ldots$, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} d_X(\bar{x}_i \bar{x}_{i+1})$, то можно так выбрать представителя каждого класса $x_i \in \bar{x}_i$, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_X(x_i, x_{i+1})$ также сходится.*

Тогда формула (1) определяет метрику в фактор-множестве $X/{\sim}$, причем $\big(X/{\sim}, d_X\big)$ является полным метрическим пространством.

Пусть каждому $\gamma \in [0,1]$ поставлено в соответствие отношение эквивалентности $\vartheta_X(\gamma)$ на множестве X. Назовем элементы $x, u \in X$, удовлетворяющие этому бинарному отношению, $\vartheta(\gamma)$-эквивалентными. Обозначим $\overline{x}_\gamma$ – класс $\vartheta_X(\gamma)$-эквивалентности элемента $x \in X$. Будем говорить, что совокупность

$$\mathfrak{V}_X = \{\, \vartheta_X(\gamma) \mid \gamma \in [0,1] \,\}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 09-01-97503, 07-01-00305), Министерства образования и науки РФ (программа РНП № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU), SIDA/SAREC, Scientific Directorate at Eduardo Mondlane University.

рассматриваемых отношений удовлетворяет условию (v), если:
($\mathtt{v}_0$) значению $\gamma = 0$ соответствует отношение $\vartheta_X(0) = X^2$ (то есть любые два элемента являются $\vartheta_X(0)$-эквивалентными);
($\mathtt{v}_1$) значению $\gamma = 1$ соответствует отношение равенства (то есть никакие два разных элемента не вступают в отношение $\vartheta_X(1)$);
($\mathtt{v}_\gamma$) из $\gamma > \eta$, следует $\vartheta_X(\gamma) \subseteq \vartheta_X(\eta)$ (любые два $\vartheta_X(\gamma)$-эквивалентных элемента будут $\vartheta_X(\eta)$-эквивалентными, если $\gamma > \eta$).

Пусть (X, ρ_X) – полное метрическое пространство, в котором задана удовлетворяющая требованиям (v) система $\mathfrak{V}_X$ отношений эквивалентности. Кроме того, считаем, что при любом $\gamma \in [0,1]$ каждый класс эквивалентности замкнут, а фактор-множество $X/\vartheta_X(\gamma)$ относительно метрики

$$\rho_{X/\vartheta_X(\gamma)}(\bar{x}_\gamma, \bar{u}_\gamma) = d_X(\bar{x}_\gamma, \bar{u}_\gamma) = \inf_{x \in \bar{x}_\gamma,\, u \in \bar{u}_\gamma} (x, u)$$

является полным метрическим фактор-пространством. Далее, предполагается, что в метрическом пространстве (Y, ρ_Y) также задана некоторая система отношений эквивалентности

$$\mathfrak{V}_Y = \{\, \vartheta_Y(\gamma) \mid \gamma \in [0,1]\,\},$$

удовлетворяющая условиям (v); при любом $\gamma \in [0,1]$ фактор-множество $Y/\vartheta_Y(\gamma)$ относительно метрики

$$\rho_{Y/\vartheta_Y(\gamma)}(\bar{y}_\gamma, \bar{w}_\gamma) = d_Y(\bar{y}_\gamma, \bar{w}_\gamma) = \inf_{y \in \bar{y}_\gamma,\, w \in \bar{w}_\gamma} (y, w)$$

является метрическим фактор-пространством (полнота пространств Y, $Y/\vartheta_Y(\gamma)$ и замкнутость классов эквивалентности $\bar{y}_\gamma \subset Y$ не требуется).

Определение. Оператор $F : X \to Y$ будем называть *вольтерровым* (*на системах* $\mathfrak{V}_X$, $\mathfrak{V}_Y$ *отношений эквивалентности*), если для каждого $\gamma \in [0,1]$ и любых $x, u \in X$ из $(x, u) \in \vartheta_X(\gamma)$ следует $(Fx, Fu) \in \vartheta_Y(\gamma)$. Таким образом, вольтерровый оператор сохраняет при любом $\gamma \in [0,1]$ отношения эквивалентности, отображая эквивалентные элементы множества X в эквивалентные элементы множества Y.

В докладе рассмотрены свойства вольтерровых на системах отношений эквивалентности операторов, исследуется разрешимость уравнений с такими операторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтера // Математический сборник. 2006. Т.197. № 10. С. 33-56.

Abstract: The operators that act in metric spaces and preserve the given equivalence relations are studied. The solvability of equations with such operators is under discussion.

Keywords: Volterra equation; Volterra operators; metric factor-space.

Жуковский Евгений Семенович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tmb.tsu.ru

Evgeniy Zhukovskiy
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Алвеш Мануэль Джоаквим
д. ф.-м. н., профессор
Университет Эдуардо Мондлане
Мозамбик, Мапуту
e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz

Manuel Joaquim Alves
doctor of phys.-math. sciences, professor
Eduardo Mondlane University
Mozambique, Maputo
e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz